

Remarque :

La fonction $y_2 = x$ étant le même dans les 4 cas (a,b,c et d) On conçoit que la condition de convergence est liée à la forme de $F(x)$

2) Convergence du processus itératif

Soit x^* , la solution de $f(x) = 0$

Alors

$$x^* = F(x^*)$$

A partir de $x^{(0)}$

$$X(1) = F(x^{(0)})$$

D'où

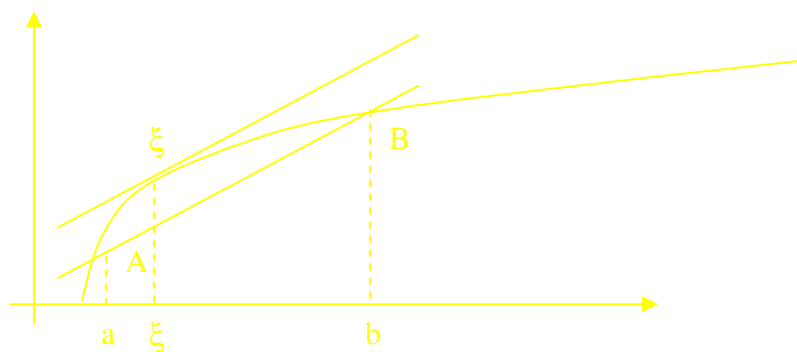
$$x^* - x(1) = F(x^*) - F(x^{(0)})$$

Théorème des accroissements finis

F , continue et dérivable sur $[a,b]$ (classe C^1)

$$\exists a,b,\xi / (F(b) - F(a)) / (b-a) = F'(\xi)$$

$$a < \xi < b$$



D'où

$$x^* - x(1) = (x^* - x(1)) F'(\xi) \text{ par } \xi \in [x^*, x^{(0)}]$$

Idem pour la 2^e, la 3^eème, et la n^{ème} itération

$$x^* - x(2) = (x^* - x(1)) F'(\epsilon(1)) \text{ pour } \epsilon(1) \in [x^*, x(1)]$$

$$x^* - x(n) = (x^* - x(n-1)) F'(\epsilon(n-1)) \text{ pour } \epsilon(n-1) \in [x^*, x(n-1)]$$

d'où :

$$(x^*, x(n)) = (x^* - x^{(0)})F'(\varepsilon(0))F'(\varepsilon(1))\dots F'(\varepsilon(n-1))$$

Le processus itératif converge SSI

$$x(n) \Rightarrow x^* \text{ pour } n \Rightarrow \infty$$

Donc

$$\lim / x^* - x(n) / \Rightarrow 0$$

En notant

$$m = \text{Max } |F'(\varepsilon(1))|$$

Pour $i=0$ on aura

$$|x^* - x(n)| < |x^* - x^{(0)}| x^n$$

Remarque :

Si $m < 1$ ($x^* - x(n)$) peut être rendue aussi petite que désirée en augmentant n

Plus $x^{(0)}$ (estime) est proche de x^* / plus le nombre d'itération pour x^* est faible

Plus $F'(x)$ sera petit / plus la convergence sera rapide

On appelle cette fonction de convergence :

$$F'(x^*) = \Phi F(x) / dx \text{ en } x = x^*$$

On peut énoncer qu'une condition suffisante pour que la méthode des substitutions successives (pt fixe) converge est que

$$|F'(x)| < 1, x \in R$$

3) Comportement de l'erreur d'estimation

$E(n) = x^* - x(n)$: erreur à la n ième itération

$F(x)$ continue sur $[a,b]$

$F'(x)$ Continue et de signe constant sur $[a,b]$

$$x^* - x(n+1) = (x^* - x(n)) F'(\varepsilon(n))$$

$$\varepsilon \in [x^*, x^n]$$

$$e^{(n+1)} = e^{(n)} F'(\varepsilon^{(n)})$$

Convergence du premier ordre

Si la méthode converge , alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon(n) = x^* \quad \text{Soit} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} e^{(n+1)}/e^n = F'(x^*)$$

4) arrêt des itérations

Convergence si $|x^{(n)} - x^{(n-1)}|/x^{(n)} < \varepsilon$ de l'ordre de 10^{-6}

III) Méthode du promoteur de convergence de WOGSTEIN

Cette méthode consiste à modifier la méthode des substitutions successives de façon à accélérer (ou forcer) systématiquement la convergence avant $x(n+1) = x(n) + \Delta x$ où $\Delta x = F(x(n)) - x(n)$.

Wogstein suggère

$$x(n+1) = x(n) + \alpha \Delta x \quad \text{où} \quad \Delta x = F(x(n)) - x(n)$$

Si $F'(x) < -1$ alors la méthode des substitutions diverge (cas c\) car la vitesse caractéristique introduite Δn est trop grande $0 < \alpha < 1/2$ forcera la convergence

Si $-1 < F'(x) < 0$ (figure a\) la convergence est lente , $1/2 < \alpha < 1$ accélèrera cette convergence

Si $0 < F'(x) < 1$ (figure b\) $\alpha > 1$ accélèrera

Si $F'(x) > 1$ (figure d\) la correction Δx oriente la recherche dans une mauvaise direction, $\alpha < 0$ changera cette direction

On démontre

$$\alpha = 1/(1-F'(\varepsilon)) \quad \varepsilon \in [x^*, x(n)]$$

Comme ε est inconnue, on peut l'estimer

$$F'(\varepsilon) = F(x^n) - F(x^{(n-1)}) / (x^n - x^{(n-1)})$$

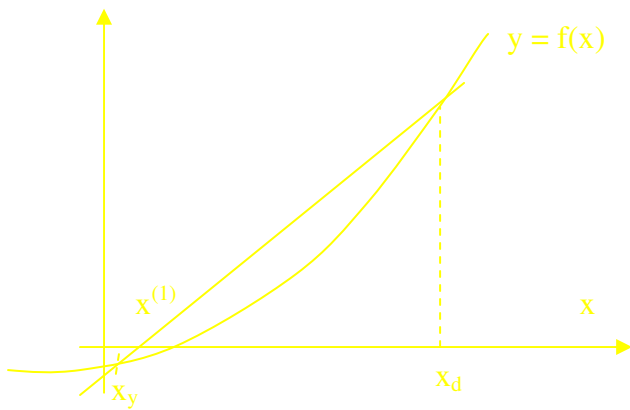
$$F'(\varepsilon) = (F(x^n) - x^n) / (x^n - x^{(n-1)})$$

IV) Méthode d'interpolation linéaire (ou régulation) et variantes

$$(x^{(1)} - x_g) / (0 - f(x_n)) = (x_d - x^{(1)}) / (f(x_d) - 0)$$

$$x^{(1)} = (x_g y_d - x_d y_g) / (y_d - y_g)$$

$$\text{ou } f(x_g) + f(x_d) < 0$$



On obtient aussi un estimé $x^{(1)}$ pour continuer il faut trouver l'intervalle $(x_g, x^{(1)})$ ou $(x^{(1)}, x_d)$ qui encadre x^*

Variantes méthode de dichotomie

$$x(k) = x_d - x_g / 2$$

Convergence assurée si $x^* \in [x_g, x_d]$

$$P = y_d y(1)$$

$$\Leftrightarrow f(x_d) * f(x(1))$$

Si $P < 0$, la racine est entre $x(1)$ et x_d

Soit $x_d = x_d$:

$$x_g = x(1)$$

Si $p > 0$ la racine est entre x_g et $x(1)$

Soit $x_g = x_g$
| $x_d = x(1)$

Calcul du nouveau $x(1)$

Méthode Itinériss pégases

Si $P > 0$ $x_d = x(1)$ $x_g = x_g$

$y_d = y(1)$ $y_g = \alpha y_g$

Itinériss $\alpha = 1/2$

Pegasus $\alpha = y_d / (y_d + y(1))$

accélère la convergence

Méthode de la sécante

$$X(k+1) = (x(n-1)y(k) - x(n) y(k-1)) / (y(k) - y(n-1))$$

II) Méthode de Newton –Raphson

- a) Si $f(x)$ est continue et continûment dérivable au voisinage de x^* , alors le développement en série de Taylor au voisinage d'un estimé $x(n)$

$$F(x^*) = f(x(n)) + f'(x(n))(x^* - x(n)) + ((x^* - x(n))^2/2!) f''(x(n)) + \dots$$

$x(n)$ est proche de x^* ,

$(f(x^*)=0)$ d'où $e(n) = (x^* - x(n))^2$ est négligeable ainsi que les termes de degrés supérieurs

Comme $f(x^*) = 0$ on obtient

$$0 = f(x(n)) + f'(x(n))(x^* - x(n))$$

$$\text{Donc } e(n) = -f(x(n))/f'(x(n))$$

D'où un meilleur « approximé » $x(n+1)$ de x^* sera $x(n+1) = x(n) + e(n)$

$$x(n+1) = x(n) - f(x(n))/f'(x(n))$$

Algorithme de Newton Raphson

Où $f'(x(n)) \neq 0$

- b) représentation graphique

Voir TD

- c) Convergence de la méthode

Théorème : Si $f \in C^2[a,b]$ vérifie

- 1) $f(a)f(b) < 0$
- 2) $\forall x \in [a,b] f'(x) \neq 0$
- 3) $\forall x \in [a,b] f''(x) \neq 0$

Alors en choisissant $x_0 \in [a,b]$

$F(x_0) f'(x_0) > 0$, la suite x_n définie par x_0 et

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n) = F(x_n)$$

Converge vers l'unique solution x^* de $f(x) = 0$ dans $[a,b]$

- d) Evolution de l'erreur

Algorithme NR :

$$x(n+1) = x_n - f(x_n)/f'(x_{n+1})$$

Développement de Taylor :

$$f(x^*) = f(x_n) + (x^* - x_n)f'(x_n) + \frac{(x^* - x_n)^2}{2!} f''(x_n) + \dots$$

Avec $x^* - x_n = 0$ et $f(x^*) = 0$

$$0 = f(x_n) + (x^* - x_n)f'(x_n) + \frac{(x^* - x_n)^2}{2!} f''(x_n) + \dots$$

$$0 = f(x_n) + (x^* - x_n)f'(x_n) + \frac{(x^* - x_n)^2}{2!} f''(x_n) + \dots$$

On obtient

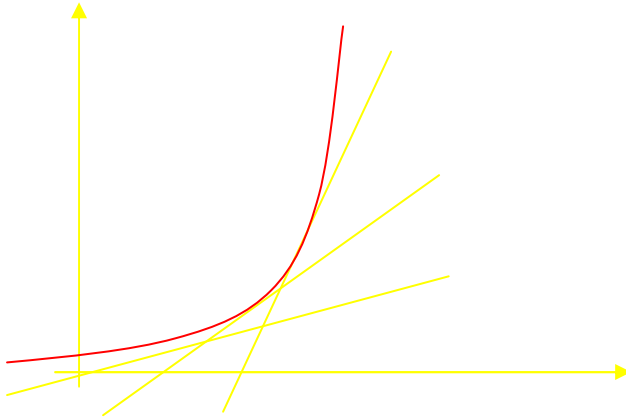
$$E_{n+1} = -\frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)} E_n^2$$

La convergence est dite quadratique

VI) Méthode de Von Mises

On remplace $f'(x^n)$ par $f'(x^0) = \text{cte}$ dans l'itération de N.R.

Intérêt : Bien que moins rapide que N.R. on ne calcule plus $f'(x_n)$



8) Approximation de la dérivée première

$$F'(x^*) = (f(x_n) - f(x_{n-1})) / (x^n - x^{(n-1)})$$

Remarque :

Si l'on remplace par cette expression $f'(x_n)$ dans N.R., on retrouve la méthode de la sécante

Résolution des systèmes linéaires - Méthodes directes

I) Introduction

Dans la pratique de l'A.N. on est souvent confronté à la résolution de systèmes linéaire $Ax = B$, A, matrice (m,n)
x et b, matrices (n,1)

Ainsi la détermination de

- contraintes et déplacements dans une structure mécanique
- Débit et pression dans réseau hydraulique
- coefficient règle des moindres carrés
- solution numérique d'équations différentielles partielles (méthode des différences finies, méthode des éléments finis) passe par la résolution d'un système linéaire ou non linéaire

Dans le dernier cas cité, le nombre d'équations peut être de plusieurs milliers

Remarque :

La résolution d'un système linéaire aisé

$$5x + 3y + 2z = 5$$

$$9x + 6y + 3z = 8$$

$$11x + y - z = 13$$

Relativement à celle d'un système non linéaire,

$$5x^4 + 3y^{1/2} + 2z^3 = 5$$

$$3x^5 + 6y + 7y^4 = 8$$

$$11x^3 + 6y^2 - z^2 = 13$$

Le problème de cramer

Dans le chapitre, nous nous intéressons à la résolution d'un système à n équation et à n inconnues que l'on notera

$$\sum a_{ij} x_i = b_i$$

Méthodes directes

Elles conduisent à la solution en un nombre fini d'étapes

Rem1

Sans les erreurs d'arrondis, cette solution serait exactement celle du système

Rem2

Ces méthodes sont recommandées (ou plus souvent utilisées par les matrices pleines ou de petite dimension)

Méthode itérative

A partir d'un estimé $x^{(k)}$, on calcule un estimé $x^{(k+1)}$ qui tend asymptotiquement vers la solution (si convergence)

- ⇒ généralement préféré pour les systèmes de grande taille, (la matrice n'étant pas transformée au cours des calculs le problème d'accumulation des erreurs deviens moins crucial)

II) Système linéaire à matrice particulière

a) Matrice triangulaire inférieure

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} = 0 \text{ pour } j > i$$

$$\alpha \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

$$A x = B \Rightarrow \sum a_{ij} x_j = b_i$$

$$\alpha \quad \alpha \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

$$\sum a_{ij} x_j + a_{ii} x_i = b_i$$

$$\alpha \quad \alpha \quad \alpha \quad 0 \quad 0$$

$$x_i = 1/a_{ii} (b_i - \sum a_{ij} x_j)$$

$$\alpha \quad \alpha \quad \alpha \quad \alpha \quad 0$$

b) Matrice triangulaire supérieure

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & \alpha & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} = 0 \text{ pour } j < i$$

$$0 \quad 0 \quad \alpha \quad \alpha \quad \alpha$$

$$A x = B \Rightarrow \sum a_{ij} x_j = b_i$$

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad \alpha \quad \alpha$$

$$\sum a_{ij} x_j + a_{ii} x_i = b_i$$

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \alpha$$

$$x_i = 1/a_{ii} (b_i - \sum a_{ij} x_j)$$

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

c) Matrices diagonales

$$A x = B \Rightarrow x_i = b_i / a_{ii}$$

III) Matrice quelconque : Méthode de CRAMER

$$X = A^{(-1)} b$$

C'est la plus connue et le moins utilisée car la moins recommandable, en effet, l'évolution de $\lambda^{(-1)}$ et la multiplication par b nécessite $\cong n! + n^2e(n-1) \approx n^2$ opérations

Si $n=10$: 3.10^9 opérations

Si $n=50$: 7.10^{67} opérations

Inimaginable numériquement

IV) Méthode de Gauss

Théorème de Gauss

Etant donné une matrice carrée $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ inversible $S/ SA=A^*$ ou $A^* [\mathbb{R}]$

1) Principe

Cette méthode consiste à triangulariser le système par étapes nécessaires

Le système reste inchangé si on le modifie par

- a) multiplication car division d'une ligne par une constante
- b) addition ou soustraction d'une ligne par une autre
- c) permutation de deux lignes

Cette méthode comporte n étapes

Etapas 1

$$(A^{(0)}, b^{(0)}) \Rightarrow (A^{(1)}, b^{(1)})$$

$$\begin{array}{cc|cc} a_{11}^{(0)}, a_{12}^{(0)}, \dots, a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} & a_{11}^{(0)}, a_{12}^{(0)}, \dots, a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ a_{21}^{(0)}, a_{22}^{(0)}, \dots, a_{2n}^{(0)} & b_2^{(0)} & a_{21}^{(1)}, a_{22}^{(1)}, \dots, a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1}^{(0)}, a_{n2}^{(0)}, \dots, a_{nn}^{(0)} & b_n^{(0)} & a_{n1}^{(1)}, a_{n2}^{(1)}, \dots, a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array} \Leftrightarrow$$

de $i = 2$ à n (de la 2^o ligne à la dernière colonne)

$$L_i = L_i - a_{ik}/a_{kk} L_k$$

$$A_{ij} = a_{ij} - a_{ik}/a_{kk} a_{kj}$$

```

Pour k= 1 à n
  Pour I = 1 + k à n
    Pour j = k à n
       $A_{ij}(1) = a_{ij}(0) - a_{ik}(0)/a_{kk}(0) \cdot a_{kj}(0)$ 
    Fin j
     $B_i(1) = b_i(0) - a_{ik}/a_{kk} \cdot b_k$ 
  Fin i
Fin k

```

```

Pour k = 2 à n
  Pour i = k à n
    Pour j = k-1 à n
       $A_{ij} = a_{ij} - a_{ik}/a_{kk} \cdot a_{kj}$ 
    Fin j
     $B_i = b_i - a_{ik}/a_{kk} \cdot b_k$ 
  Fin i
Fin k

```

A la (k+1)ième étape on travaille sur les lignes k+1 à n pour la colonne k(ou k+1) à n
Ainsi en (n-1) étapes, on abouti au système $A^*x=b^*$
où A^* est une matrice triangulaire supérieure de résolution de ce système

Remarque :

On a supposé à chaque itération que $(a_{kk} ; k-1) \neq 0$, le pivot n'est jamais nul !
Cependant il est possible qu'il s'annule au cours des opérations

Si $a_{kk}(k-1)=0$ on choisit comme élément pivot

$$A(lk \ k-1) = \max_i |a_{ik} \ k-1| \ (i \in [k,n])$$

On permute alors la ligne k avec la ligne l , seul procédé du pivot partiel (on n'oublie pas le 2nd membre)

Pivot total

$$a_{ln} \ (k-1) = \max_{i,j[k,n]} |a_{ij}(k-1)|$$

On permute alors la ligne l avec la ligne et la colonne m avec la colonne k
Si malgré tout ceci on ne trouve pas de pivot nul , alors la matrice est singulière.

V) décomposition LU

Théorème 1

Si la triangularisation de Gauss n'amène aucun pivot nul, alors il existe une décomposition unique de A / $A=LU$ ou L matrice triangulaire inférieure (lower) et U matrice triangulaire supérieure (upper)

Théorème 2

Si A est à diagonale dominante, $\forall i, |a_{ii}| > \sum |a_{ij}|$ alors il n'existe aucun pivot nul dans la décomposition de gauss et LU existe

La résolution de $Ax=b$ se fera en deux étapes

$$LU x = b$$

1° étapes

$$Ly = b$$

Système triangulaire inférieur $\Rightarrow y = ?$

2° Etape

$$Ux = y$$

Système triangulaire Supérieur $\Rightarrow x = ?$

Gauss :

$$Ax=b \Rightarrow A^*x=b^*$$

LU :

$$Ax=b \Rightarrow LUx=b$$

Cette méthode est intéressante quand on résous plusieurs fois un système dont seul le 2nd membre change

Expression de L et de U

On montre qu'il existe une matrice L qui permet de passer de l'étape k à l'étape k+1 de la triangulaire de Gauss

Ainsi

$$A_k = L_k A_{k-1}$$

Avec

$$L_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & & & & & & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & & & & & & : \\ : & : & & : & & & & & & : \\ 0 & 0 & \dots & 1 & & 0 & & & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & l^{(k+1 \ k)} & & 1 & & & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & l^{(k+2 \ k)} & & 0 & 1 & & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & l^{(k+3 \ k)} & & 0 & 0 & 1 & & 0 \\ : & : & & : & & : & : & & & : \\ : & : & & : & & : & : & & & : \\ : & : & & : & & : & : & & & : \\ 0 & 0 & \dots & l^{(nk)} & & 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Où $l_{i,k} = a_{ik}/a_{kk}$ élément pivot

Et

$$\begin{aligned} A(1) &= l_1 A^\circ \\ A(2) &= l_2 A(1) = l_2 l_1 A^\circ \\ &\vdots \\ A(n+1) &= l(n-1)l(n-2) \dots l_1 A^\circ \end{aligned}$$

D'où $A(n-1) = L \text{ Gauss } A^\circ$

Où

$$L \text{ Gauss} = l(n-1)l(n-2) \dots l_2 l_1$$

Est une matrice triangulaire inférieure régulière ($\det L = 1 \neq 0$) que l'on peut inverser
Posons $L = L^{-1} \text{ Gauss}$ et on obtient $A = LU$

Où

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ : & : & : & \dots & : \\ l_{k1} & : & : & l^{(k+1 \ k)} & \dots & 0 \\ : & : & : & : & : & : \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nk} & l(n \ n-1) & 1 \end{pmatrix}$$

et $U = ?$

$$A^{(n-1)} = L_{\text{gauss}} A^\circ$$

$$L^{(-1)} A^{(n-1)} = L^{(-1)} L_{\text{g}} A^\circ$$

$$L^{(-1)} A^{(n-1)} = A^\circ$$

$$L A^{(n-1)} = A^\circ$$

$L A^{(n-1)} = A^\circ$ avec A° matrice initiale et $A^{(n-1)}$ matrice modifiée après $n-1$ étapes de la triangularisation

Donc

$$A^{(n-1)} = U$$

D'où

$$A = LU$$

V) Décomposition de CHOLESKI

Cette méthode est très employée lorsqu'elle est réelle, symétrique définie positive :

A définie positive :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^n \\ x^t A x > 0 \\ \text{Si } x^t A x = 0 \Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Dans ce cas, A peut être décomposé en $A = LL^t$

Détermination de L :

$$A = LL^t$$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n l_{ik} l_{tk} = \sum_{k=1}^i l_{ik} l_{jk}$$

Or

$$\begin{aligned} l_{ik} &= 0 \text{ pour } k > i, \\ l_{jk} &= 0 \text{ pour } k > j \end{aligned}$$

D'où

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} l_{ik} l_{jk}$$

$$\begin{aligned} i &= 1, n \\ j &= 1, n \end{aligned}$$

Pour la partie triangulaire supérieure de A , elle est symétrique la r ième ligne s'écrit

$$a_{rj} = \sum_{k=1}^{\min(r,j)} l_{rk} l_{tk} \quad j=r, n$$

Soit

$$a_{rj} = \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk} l_{tk} + l_{rn} l_{tn} \quad j=r, n$$

Soit l'algorithme qui permet de trouver la n ième ligne

Pour $r = 1, n$

$$L_{rr} = [a_{r,r} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{rk}^2]^{1/2}$$

Pour $j = i+1, n$

$$L_{jr} = [a_{ij} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{rk} l_{jk}] / l_{rr}$$

fin j

Résolution des systèmes linéaires - Méthode itératives

I) introduction

On veut résoudre le système linéaire de CRAMER

$$Ax = b \quad x \in \mathbb{R}^n \quad A(n,n)$$

Les méthodes présentées sont la généralisation au cas n dimensionnels de méthode de résolution de $f(x) = 0$

Ces méthodes consistant à utiliser un estimé initial

$$X^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$$

De la solution exacte

$$X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^t$$

II) Principe des substitutions successives

$Ax = b$ peut s'écrire en écrivant A sous la forme

$$\begin{aligned} A &= M - N \text{ (régulières } \Rightarrow M^{-1} \exists \text{)} \\ Ax &= b \\ (M-N)x &= b \\ Mx &= Nx + b \\ x &= (M^{-1})(Nx + b) \\ x &= (M^{-1}N)x + (M^{-1})b \end{aligned}$$

d'où à partir d'un estimé

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= M^{-1} N x^{(0)} + M^{-1} b \\ x^{(k+1)} &= T x^{(k)} + V \quad \text{où } k = 1, 2, \dots \\ T &= M^{-1} N \\ V &= M^{-1} b \end{aligned}$$

Question, Cette méthode converge t-elle ?

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = x^* ?$$

Posons $e(k) = x(k) - x^*$

Mais

$$\begin{aligned} x^* &= T x^* + V \\ x(k+1) &= T x(k) + V \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} x(n+1) - x^* &= T(x(k) - x^*) + V - V \\ e(k+1) &= T e(k) \end{aligned}$$

Soit $e(1) = T e^0$

Le processus converge : oui

$$\forall e(1), \lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = 0$$

Donc

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T^k e^0 = 0, \forall e^0$$

Donc le processus converge

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T^k = 0$$

où 0 est la matrice nulle d'ordre n

Une condition nécessaire et suffisante de convergence est que le rayon spectral $\rho(T)$ de la matrice T soit $\rho(T) < 1$ (Car $\rho(T) = \max |\lambda_i|$ (λ_i ème valeur propre) , $\rho(T) \leq \|T\|$)

D'où si $\|T\| < 1$ alors $\rho(T) < 1$

III) Décomposition de la matrice A=M-N

But : on veut choisir une matrice T convergente

$A=M-N$ / M régulière soit facilement inversible et vérifier $\rho (M^{-1}N) < 1$ où $\|M^{-1}N\|<1$
 Définissons les matrices suivantes

$$*D / d_{ii} = a_{ii} \quad \forall i, \quad a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$$

$$*L / l_{ij} = -a_{ij} \quad i > j \\ = 0 \quad i < j$$

$$*U / u_{ij} = -a_{ij} \quad j > i \\ = 0 \quad i > j$$

$$A = \begin{pmatrix} x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & x & 0 & 0 & 0 \\ x & x & x & 0 & 0 \\ x & x & x & x & 0 \\ x & x & x & x & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & x & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = D - L - U$$

IV) Types de décompositions

Jacobi

$$A = M - N$$

$$M = D$$

$$D = L + U$$

Gauss seidel

$$A = M - N$$

$$M = D - L$$

$$N = U$$

Relaxation

$$A = M - N$$

$$M = 1/\omega D - L$$

$$N = 1 - \omega/\omega D + U$$

$$\omega \in \mathbb{R}^{+*}$$

V) Méthode de Jacobi

$$A=M-N=D-(L+U)$$

$$Ax=b$$

$$DX^{(k+1)}=(L+U)x^{(k)} +b$$

$$x^{(k+1)} = D^{-1}[(L+U)x^{(k)} +b]$$

$$x_i^{(k+1)} = 1/a_{ii}(b_i - \sum_{j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k)})$$

Arrêt des itérations lorsque:

$$\text{Max } (x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)})/x_i^{(k)} < \varepsilon \sim 10^{-6}$$

Théorème

Une condition suffisante de convergence (Jacobi) est que A sont à diagonales fortement dominante /

$$\forall i \quad |a_{ii}| > \sum_{j=1 \neq i}^n |a_{ij}|$$

VI) Méthode de Gauss seidel

$$A = M - N \text{ avec } M = D - L$$

$$N = U$$

$$T = (M^{-1}) N = (D - L)^{-1} U$$

D'où la méthode itérative

$$(M - N) x = b$$

$$Mx = Nx + b$$

$$(D-L) x(k+1) = Ux(k) + b$$

$$D x(k+1) = L x(k+1) + Ux(k) + b$$

$$X(k+1) = (D^{-1}) (Lx(k+1) + Ux(k) + b)$$

En développant à partir de 1 le membre de gauche

$$\begin{aligned} (D-L) x_i(k+1) &= \sum_{j=1}^i a_{ij} x_j(k+1) \\ &= a_{ii} x_i(k+1) + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j(k+1) \end{aligned}$$

Le membre de droite

$$Ux(k) + b = \sum_{j=i+1}^n -a_{ij} x_j(k) + b_i$$

d'où

$$x_i(b \neq 1) = [b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j(k+1) - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j(k)]$$

Arrêt ? : identique à jacobi

Convergence ; Diagonale à forte dominante (comme Jacobi)

Remarque

Cette méthode utilise les i -èmes composante de $x(n+1)$ pour calculer le $(i+1)$ -ièmes composants de $x(n+1)$ pour calculer la i -ème composante. La convergence sera alors plus rapide que celle de Jacobi.

VII) Méthode de relaxation

Dans un procédé qui fait passer d'un vecteur entré $x(k)$ à l'estimé $x(k+1)$, si $x(k)$ et $x(k+1)$ n'ont qu'une composante différente d'un pas à l'autre, on dit que le procédé est une relaxation, sinon, c'est une itération

La méthode de Gauss seidel est un groupement de n relaxations

Principe :

$$x(k+1) = x(k) + \omega(x(k+1) - x(k))$$

Où $x(k+1)$ est le vecteur estimé de G. Seidel

Si $\omega=1 \Rightarrow$ G Seidel
Si $\omega>1 \Rightarrow$ sur relaxation
Si $\omega<1 \Rightarrow$ sous relaxation

G. Seidel

$$x_i(k+1) = 1/a_{ii} [b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j(k+1) - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j(k)]$$

$$x_i(k+1) = x_i(k) + \omega \left\{ \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j(k+1) - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j(k) \right] - x_i(k) \right\}$$

$$x_i(k+1) = x_i(k) + \omega \left\{ \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j(k) \right] - a_{ii} x_i(k) \right\}$$

$$\forall i = 1, \dots, n$$

Notation matricielle

$$\begin{aligned} a_{ii} x_i(k+1) + \omega \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j &= a_{ii} x_i(k) - \omega \sum_{j=i}^n a_{ij} x_i(k) \\ &= a_{ii} x_i(k) - \omega a_{ii} x_i(k) - \omega \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j(k) + \omega b_i \end{aligned}$$

Soit

$$(D - \omega L) x(k+1) = [(1-\omega) D + \omega U] x(k)$$

Soit

$$(D/\omega - L) x^{(k+1)} = [(1-\omega)/\omega D + U] x^{(k)} + b$$

$$T = (D/\omega - L)^{-1} [(1-\omega)/\omega D + U]$$

$$V = (D/\omega - L)$$

Arrêt identique à Gauss Siedel ou Jacobi

Pour la matrice T d'itérations de la méthode de relaxation on obtient $\rho(T) > |\omega - 1|$ et la convergence assure pour $0 < \omega < 2$

Interpolation trigonomiale : **Interpolation au sens des** **moindres carrés**

I) Introduction

L'ingénieur , l'organisateur , le sociologue ont souvent à prendre des décisions au sujet de phénomènes dont ils ne connaissent le comportement qu'à partir de données ou de mesures expérimentales

Dans certains cas , comme en physique, la connaissance fondamentale des phénomènes permet de proposer un modèle mathématique précis

Mais bien souvent, on ignore les mécanismes précis de phénomène ou alors les mesures sont bruitées

On peut alors proposer un modèle statistique

L'approximation peut se concevoir comme une application de $\mathbb{R}^n$ (espace à n dimension des variables mesurées) dans $\mathbb{R}^m$ (espace à m dimensions des paramètres d'un modèle)

Cette application dépend d'un modèle choisi

II) Modèle linéaire

Le but est de trouver une fonction

$Y^* = g^*(x)$ qui approchera au mieux le jeu de n données

$\{x_i, y_i \quad i=1,n\}$ représenté par $y = g(x)$

Le modèle le plus commun donne de la classe des fonctions de la forme

$$Y^*(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \dots + C_m f_m(x)$$

Où

Les $f_j(x)$ constituent un s.e.v. de dimension m

Les paramètres $[C_1, C_2, \dots, C_m]$ apparaissent sous forme linéaires (indépendant de x)

Remarque

Cette forme linéaire inclut

a) Les polynômes simples

$$Y^* = C_1 + C_2 x + \dots + C_m x^{(n-1)}$$

b) Les polynômes de Legendre

$$Y^* = C_1 P_0(x) + C_2 P_1(x) + \dots + C_m P_m(x)$$

$$P_n(x) = \frac{1}{(2^n n!)} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$
$$P_0(x) = 1$$

c) Polynôme de Chebychev

$$Y^* = C_1 T_0(x) + C_2 T_1(x) + \dots + C_m T_{m-1}(x)$$

$$T_0(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad T_{k+1}(x) = 2x T_k(x) - T_{k-1}(x)$$
$$T_1(x) = x$$

d) Besell, fourier, formes exceptionnelles

III) Mesure de la qualité d'une approximation

Une solution approximation nécessite que $(y - y^*)$ soit mesuré et minimisée

La distance entre la fonction réelle y et mon modèle y^* peut être mesuré par la norme

L1 norme de Laplace

$$\|y - y^*\|^{(1)} = \sum_{i=1}^n |y_i - y_i^*|$$

L2 Norme Euclidienne

$$\|y - y^*\|^{(2)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - y_i^*)^2}$$

L^∞ Norme mini maxi de Laplace TChebychev

$$\|y - y^*\|^{(\infty)} = \max_{i=1, n} |y_i - y_i^*|$$

On utilise en général la norme L1 ou mieux, la norme des carrés pondérés de Legendre

$$\|y - y^*\|_{(2, \omega)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - y_i^*)^2 \omega_i}$$

$\omega_i > 0$

Qui permet de privilégier certains points de mesure (par exemple plus précis) par l'intermédiaire d'une fonction poids ω_i

IV) approximation et interpolation

Soit un ensemble de n valeurs x_i d'une grandeur x , auxquelles correspond un ensemble de valeurs y_i d'une grandeur y

$y_i^* = f(x_i, C_1, C_2, \dots, C_m)$ représente la liaison entre X et Y , est connue
 $C_1, C_2, \dots, C_m$ inconnues à définir

Si le modèle est parfait, alors, $y_i - y_i^* = 0$
 $y_i - f(x_i, C_1, C_2, \dots, C_m) = 0 \quad i=1, n$

C'est un système linéaire (hypothèse sur les C_i) de N équations à n inconnues

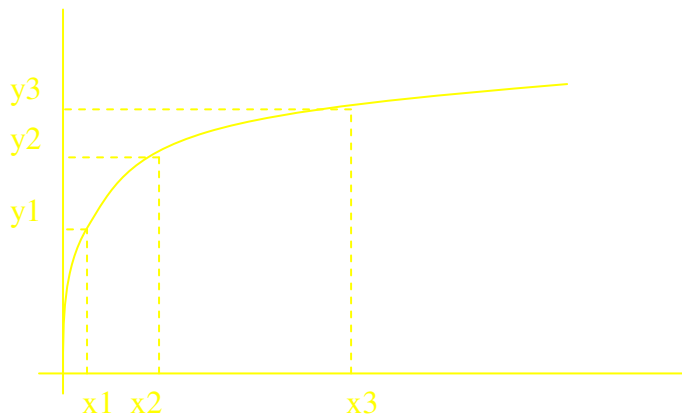
3 cas :

a) $n < m$ soit plus d'inconnues que d'équations

il y a une infinité de solutions

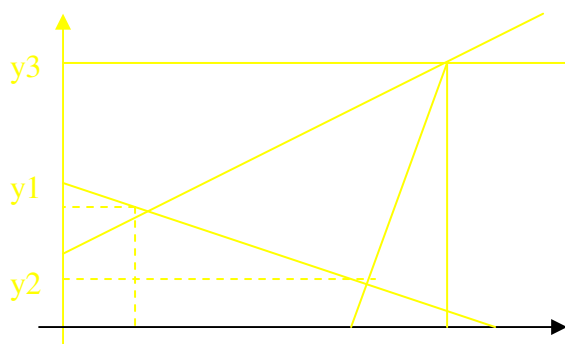
il y a une indétermination d'ordre $(m-n)$

b) $n = m$ Solution unique des $(C_1, C_2, \dots, C_m)$ y_i^* passe par chacun des n points donnés



c) $n > m$ Système surdéterminé de n équations à m inconnues

Aucune fonction ne peut passer par tous les points



Dans le 3 ième cas , les y_i^* diffèrent des y_i d'où l'erreur commise $e_i = y_i - y_i^*$, $i=1, n$

Systèmes de n équations linéaires à $(m+n)$ inconnues : $(m \ C_j + h \ e_i)$

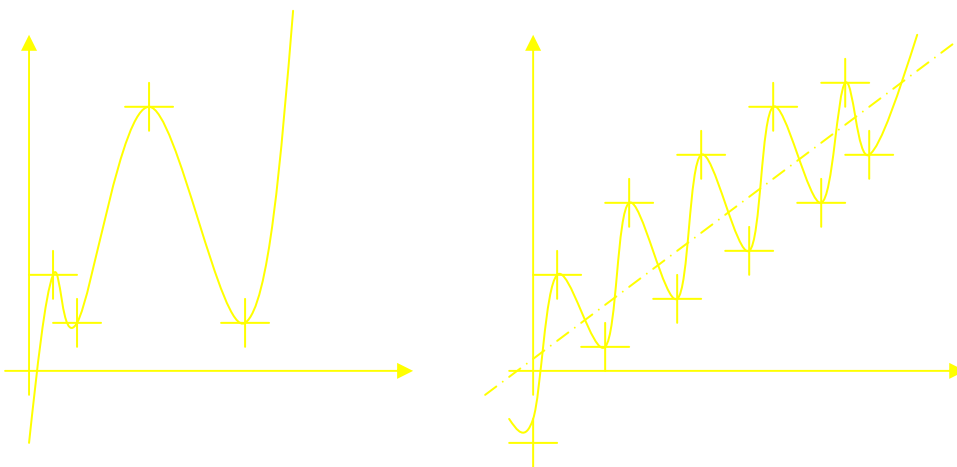
On cherchera à minimiser le e_i par la norme L_2 ou L_2, ω

Conclusion

Mathématiquement on a 2 types de problèmes

$n=m$ Problème d'interpolation

$n>m$ Problème d'approximation



V) Interpolation polynomiale

1) Généralités

Soit $(n+1)$ couples $(x_0, y_0); (x_1, y_1); \dots$
 $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que les x_i soient tous différents

On cherche un polynôme P tel que $p(x_i) = y_i = y^{(xi)}$

Théorème d'unicité

$\exists$ un polynôme et un seul de degrés au plus n tel que $P(x_i) = y^{(xi)}$; $i = 0, n$

La recherche d'un polynôme est équivalente à la résolution d'un système linéaire à $(n+1)$ dimension

$$\begin{array}{l|l|l} |1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n & | & C_0 & | & y_0 & | \\ |1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n & | & C_1 & | & y_1 & | \\ | & & & & & | & & | & & | \\ | & & & & & | & * & | & = & | \\ | & & & & & | & & | & & | \\ |1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n & | & C_m & | & y_m & | \end{array}$$

Donc le déterminant, appelé déterminant de Van der Made

$\prod_{n > i > j > 0} (x_i - x_j)$ ne s'annule pas car $x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$ condition nécessaire aux mesures

pour $i \neq$ condition nécessaire aux mesures

D'où une solution unique pour le $C_0, C_1, \dots, C_n$

On montre que l'erreur s'écrit

$$\begin{aligned} Y^*(x) - y(x) &= P(x) - y(x) \\ &= (y(n+1)\varepsilon/(n+1)!) \Pi(x) \end{aligned}$$

Où

$$\Pi(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) \quad \text{et} \quad \varepsilon \in [x_0, x_n]$$

2) Polynôme de Lagrange

Existence :

La construction d'un polynôme de degrés au plus n / $p(x_i) = y(x_i) = y_i$ pour $i=0, n$ prouvera son existence.

a) Cas particuliers

Trouver le polynôme l_k de degrés au plus n /

$$l_k(x_i) = 0 \quad \text{pour } i \neq k$$

$$l_k(x_k) = 1$$

Ce polynôme s'annule n fois pour $x_0, x_1, \dots, x_n$

Il s'écrit donc

$$l_k(x) = \lambda (x-x_0)(x-x_1)\dots\dots\dots(x_k-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots\dots\dots(x-x_n)$$

d'autre part

$$l_k(x_k) = \lambda (x_k-x_0)(x_k-x_1) \dots\dots\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1}) \dots\dots\dots(x_k-x_n)$$

d'où

$$\lambda = 1 / (x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots\dots\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots\dots\dots(x_k-x_n)$$

d'où,

$$l_k(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n) / (x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)$$

b) Cas général

Les $(n+1)$ polynômes l_k ($k=0,1,\dots,n$) sont linéairement indépendantes dans l'espace vectoriel des polynômes de degrés au plus n

Démo :

$$\lambda_0 l_0 + \lambda_1 l_1 + \dots + \lambda_n l_n = 0$$

$$\Leftrightarrow x = x_n \text{ et } k=0,n$$

$$\lambda_0 l_0(x_n) + \lambda_1 l_1(x_n) + \dots + \lambda_k l_k(x_k) + \dots + \lambda_n l_n(x_n) = 0$$

$$\lambda_k = 0 \text{ vrai pour } k = 0 \text{ à } n \text{ donc}$$

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

ainsi les $n+1$ polynômes l_k sont linéairement indépendants.

Les $(n+1)$ polynômes l_k forment une base de cet espace vectoriel de dimension $(n+1)$

Le polynôme recherché s'obtient comme combinaison linéaire des polynômes :

$$P = \sum_{k=0}^n g_k l_k$$

Formule de Lagrange $L_k = l_k$: multiplicateur de Lagrange

$$P(x_i) = \sum_{k=0}^n y_k l_k(x_i) = y_i \quad \text{pour } i=0, \dots, n$$

Polynôme osculateur

Ce sont des polynômes qui assurent l'égalité de la fonction et des k premières dérivées

Donc pour un jeu de données $(x_i, y(x_i))$

Tel que

$$p(x_i) = y(x_i)$$

$$P'(x_i) = y'(x_i)$$

Les 2 courbes sont tangentes en x_i

c) Formule d'Hermite

Soit un jeu de $n+1$ données, $\exists$ un polynôme unique de degrés $(2n+1)$ tel que

$$P(x_i) = y(x_i)$$

$$P'(x_i) = y'(x_i)$$

$$P(x) = \sum_{i=0}^n U_i(x) y(x_i) + \sum_{i=0}^n V_i(x) y'(x_i)$$

On montre que

$$U_i(x) = \{1 - 2(x - x_i) l_i(x_i)\} l_i^2(x)$$

$$V_i(x) = (x - x_i) l_i^2(x)$$

d) Polynôme de Taylor

Pour une seule valeur de x_0 du jeu de données, les valeurs du polynôme et ses n premières dérivées doivent coïncider avec celle d'une fonction définie par $y(x)$

Soit $P_i(x_0) = y_i(x_0)$ pour $i = 0, 1, \dots, N$

$$\text{Où } P(x) = \sum_{i=0}^n \frac{y_i(x_0)}{i!} (x - x_i)^i$$

VI) Méthode des moindres carrés

1) Modèle linéaire quelconque

On propose le modèle linéaire (les C_j sont inconnues $j=1, \dots, m$)

$$Y_i^* = C_1 f_1(x_i) + C_2 f_2(x_i) + \dots + C_m f_m(x_i)$$

L'erreur commise en tout point i ($n > m$), donc aucune courbe ne peut passer par tous les points d'appuis

En approximant les valeurs mesurées Y_i par y_i^* et $e_i = y_i - y_i^*$

Soit

$$y_i - \sum_{j=1}^m C_j f_j(x_i) = e_i$$

Le système de n équations à $n+m$ inconnues (C_j pour $j=1$ à m et e_i pour $i=1$ à n) admet une infinité de solutions

La meilleure solution sera obtenue en minimisant le scalaire

$$Z = \sum_{i=1}^n e_i^2$$

une C.N. pour que Z soit minimal dans l'espace des paramètres $(C_1, \dots, C_m)$ afin que $\partial Z / \partial C_k = 0$, $k=1, \dots, m$

$$\frac{\partial}{\partial C_k} \left(\sum_{i=1}^n e_i^2 \right) = 0 \quad k=1, \dots, m$$

$$2 \sum_{i=1}^n e_i \frac{\partial e_i}{\partial C_k} = 0 \quad k=1, \dots, m$$

mais

$$\frac{\partial e_i}{\partial C_k} = \frac{\partial}{\partial C_k} (y_i - \sum_{j=1}^m C_j f_j(x_i))$$

$$\sum_{i=1}^n e_i \frac{\partial e_i}{\partial C_k} = 0 \quad k=1, \dots, m$$

mais

$$\begin{aligned}
 \partial x_i / \partial C_k &= \partial / \partial C_k \left(y_i - \sum_{j=1}^m C_j f_j(x_i) \right) \\
 &= \partial y_i / \partial C_k - \sum_{j=1}^m \partial / \partial C_k (C_j f_j(x_i)) \\
 &= - \sum_{j=1}^m \{ f_j(x_i) \partial C_j / \partial C_k + C_j f_j(x_i) / \partial C_k \} \\
 &= - \sum_{j=i}^m f_j(x_i) \partial C_j / \partial C_k \\
 &= -f_k(x_i) .
 \end{aligned}$$

Soit

$$\sum_{j=1}^n \omega_i \left[y_i - \sum_{i=1}^n C_j f_j(x_i) \right] f_k(x_i) = 0 \quad k = 1, m ;$$

en définissant

$$\begin{aligned}
 b_k &= \sum_{i=1}^n \omega_i y_i f_k(x_i) \quad k=1, m \\
 a_{kj} &= \sum_{i=1}^n \omega_i f_i(x_i) f_k(x_i) \quad k=1, m \quad j=1, m
 \end{aligned}$$

Le système s'écrit

$$\sum_{j=1}^m a_{kj} C_j = b_k \quad k=1, m .$$

Remarque

$a_{kj} = a_{jk}$ par construction

A est symétrique

Les quantités a_{kj} et b_k sont entièrement déterminées car on connaît les (x_i, y_i) et le modèle que l'on propose.

Soit $f_j(x)$ et les poids ω_i

Il ne reste donc que m inconnues ($C_1, \dots, C_n$)

Remarque :

Les systèmes étant à matrice symétrique (définie positives) par construction, l'emploi de la méthode de CHOLESKI est fortement indiquée

2) Modèle polynomiale Simple

$$y_i^* = C_1 x_i^0 + C_2 x_i^1 + \dots + C_m x_i^{n-1}$$

donc les $f_j(x_i) = x_i^{j-1}$

donner le système $Ax=b$

$$\sum_{j=1}^m a_{kj} C_j = b_k \quad k=1, n$$

$$\begin{aligned} a_{11}C_1 &= a_{12}C_2 = a_{13}C_3 = \dots = b_1 \\ a_{21}C_1 &= a_{22}C_2 = a_{23}C_3 = \dots = b_2 \end{aligned}$$

Or on sait que pour $k=1, m$ et $j=1, m$

$$b_k = \sum_{i=1}^n \omega_i y_i f_k(x_i)$$

$$a_{kj} = \sum_{i=1}^n \omega_i f_j(x_i) f_k(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^n \omega_i x_i^{(j-1)} x_i^{(k-1)}$$

$$= \sum_{i=1}^n \omega_i x_i^{(k+j-2)}$$

$$b_k = \sum_{i=1}^n \omega_i y_i x_i^{(k-1)}$$

$$\sum_{i=1}^n$$

$$\sum_{i=1}^n$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n 1 \dots \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i^2 \dots \sum_{i=1}^n x_i^{(n-1)} & C_1 \sum_{i=1}^n y_i f_1^{(x_i)} \\ \sum_{i=1}^n x_i \dots \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n & C_2 \sum_{i=1}^n y_i f_2^{(x_i)} \\ * & = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i^{(n-1)} \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i^{2(n-1)} & C_m \sum_{i=1}^n y_i f_m^{(x_i)} \end{aligned}$$

Intégration numérique

I) Introduction

La formulation de nombreux problèmes est obtenue sous forme de dérivées. Les solutions font donc appel à des intégrales. Le problème est donc de calculer

$$S(y) = \int_a^b y(x) dx$$

Si on connaît une primitive

$$S(y) = Y(b) - Y(a)$$

Cependant, et en général, on ne connaît Y . On doit alors approcher $S(y)$ par des formules d'intégration

$$S^*(y) = \int_a^b P(x) dx \sim \int_a^b y(x) dx \text{ l'approximation polynomiale de } f$$

$$S^*(y) = \int_a^b y(x) dx \sim \sum A_i y(x_i) \text{ l'expression Gaussienne}$$

II) Intégration basée sur les approximations polynomiales

1) Généralités

Soit un intervalle $[a,b]$

Soit un jeu de données (x_i, y_i) , $i=0, \dots, n$

Tel que $x_0 = a$

$x_n = b$

Soit $y(x)$ en fonction définie sur $[a,b]$ et $y^*(x)$ non interpolée de Lagrange

$$S(y) = \int_a^b y(x) dx \text{ et} \\ S^*(y) = \int_a^b y^*(x) dx \text{ où } y^*(x) = \sum y(x_i) Li(x)$$

$Li(x) = li(x)$ est le multi opérateur de Lagrange

$$S^*(y) = \int_a^b \sum_{i=0}^n y(x_i) Li(x) dx$$

$$S^*(y) = \sum_{i=0}^n y(x_i) \int_a^b Li(x) dx$$

Posons :

$$Bin = 1/b-a \int_a^b Li(x) dx$$

$$\text{Avec } Li(x) = \prod_{j \neq i=0}^n (x-x_j)/(x_i-x_j)$$

$n \Rightarrow$ degrés du polynôme

Alors

$$S^*(y) = (b-a) \sum y(x_i) Bin$$

2) Formules de Newton Cotes

Soit un intervalle $[a, b]$ et une subdivision régulière à n intervalles sur $[a,b]$
 $(x_0, x_1, \dots, x_n)$

$$\begin{aligned} x_0 &= a \\ x_1 &= x_0 + h \\ x_2 &= x_1 + h \\ &= x_0 + 2h \quad h = b-a/n \\ x_i &= x_0 + ih \\ x_n &= x_0 + nh \end{aligned}$$

$$S^*(y) = (b-a) \sum_{i=0}^{i=n} y_i B_i^n$$

n'est plus fonction que de l'indice car l'espace est régulier

Supposons n=1 degrés du polynôme , $x_0 = a$, $x_1 = b$

$$B_0^1 = 1/(x_1-x_0) \int_{x_0}^{x_1} L_0(x) dx \quad \text{avec } L_0 = \prod_{j \neq 0} ((x - x_j)/(x_0 - x_j))$$

$$B_0^1 = 1/(x_1-x_0) \int_{x_0}^{x_1} (x - x_1)/(x_0 - x_1) dx$$

$$= -1/(x_1 - x_0)^2 \int_{x_0}^{x_1} (x - x_1) dx$$

$$= -1/(x_1 - x_0)^2 [(x^2/2) - x_1]_{x_0}^{x_1}$$

$$= -1/(x_1 - x_0)^2 [(x_1 - x_0)^2/2 - x_1(x_1 - x_0)]$$

$$= -1/2 + x_1/(x_1 - x_0)$$

$$B_1^1 = 1/(x_1 - x_0) \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)/(x_1 - x_0) dx$$

$$= 1/(x_1 - x_0)^2 \int_{x_0}^{x_1} x - x_0 dx$$

$$= 1/(x_1 - x_0)^2 [(x^2/2) - x_0x]_{x_0}^{x_1}$$

$$= 1/2 - x_0/(x_1 - x_0)$$

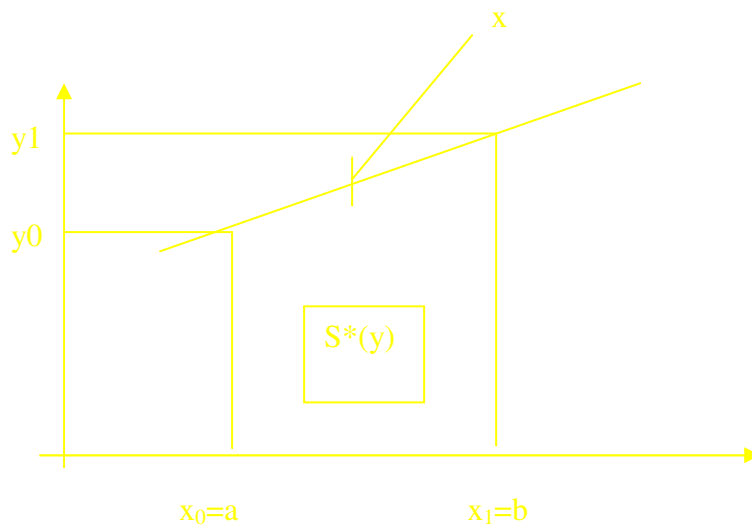
$$S^*(y) = (b-a) \sum_{i=0}^{i=n} y_i B_i^n$$

$$S^*(y) = (x_1 - x_0) \sum_{i=0}^{i=n} y_i B_i^1$$

$$= (x_1 - x_0) (y_0 B_0^1 + y_1 B_1^1)$$

$$= (x_1 - x_0) [y_1(1/2 - x_0/(x_1 - x_0)) - y_0(1/2 - x_1/(x_1 - x_0))]$$

Or $S^*(y) = (x_1 - x_0) (y_0 + y_1)/2$



Supposons $n=2$

$$\begin{aligned} x_0 &= a \\ x_1 &= (a+b) / 2 \\ x_2 &= b \end{aligned} \quad x_0 + x_1 / 2$$

$$B_0^2 = ?$$

$$B_1^1 = ?$$

$$B_2^2 = ?$$

$$\begin{aligned} B_0^2 &= 1/(x_2 - x_0) \int_{x_0}^{x_2} (x - x_1/x_0 - x_1)(x - x_2/x_0 - x_2) dx \\ &= -1/(x_2 - x_0)^2 \int_{x_0}^{x_2} (x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2)/(x_0 - x_1) dx \\ &= -1/((x_1 - x_0)^2(x_0 - x_1)) \int_{x_0}^{x_2} x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 dx \\ &= -1/((x_1 - x_0)^2(x_0 - x_1)) [x^3/3 - (x_1 + x_2)x^2/2 + x_1x_2]_{x_0}^{x_2} \\ &= -1/((x_1 - x_0)^2(x_0 - x_1)) [(x_2 - x_0)^3/3 - (x_1 + x_2)(x_2 - x_0)^2/2 + x_1x_2] \\ &= -1/(x_2 - x_0)^2(x_0 - x_1) [(x_2 - x_0)^3/3 - (x_1 + x_2)(x_2 - x_0)^2/2 + x_1x_2] \\ &= - (x_2 - x_0)/(3(x_0 - x_1)) + (x_1 + x_2)/(2(x_0 - x_1)) - x_1x_2/((x_2 - x_0)^2(x_0 - x_1)) \end{aligned}$$

Après calcul

$$B_0^2 = 1/6 = B_2^2$$

$$B_1^2 = 4/6$$

$$S^*(y) = (b-a)/6 (y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Or $b-a = 2h \Rightarrow h = b-a/2$

$$S^*(y) = h/3 (y_0 + 4y_1 + y_2)$$

$$\begin{aligned} S^*(y) &= - (x_1 - x_0) / (3 (x_0 - (x_0 + x_1) / 2)) + ((x_1 + x_2) / 2 + x_2) / 2 (x_0 - (x_0 + x_2) / 2) \\ &\quad - ((x_1 + x_2) / 2 + x_2) / ((x_2 - x_0)^2 (x_0 - (x_0 + x_2) / 2)) \\ &= -2 (x_2 - x_0) / (3 (x_0 + x_2)) + (x_0 + 3x_2) / (2 (x_0 + x_2)) - 2(x_0 + x_2) x_2 / (x_2 - x_0)^2 \\ &\quad (x_0 + x_2) \\ &= -2 (x_2 - x_0) / (3 (x_0 + x_2)) + (x_0 + 3x_2) / (2 (x_0 + x_2)) - 2x_2 / (x_1 - x_0)^2 \\ &= - (4 (x_2 - x_0) + 3x_0 + 9x_1) / (6 (x_0 + x_2)) - 2x_2 / (x_2 - x_0)^2 \end{aligned}$$

Généralisation

Montrons que l'intervalle est régulièrement espacé, c'est-à-dire

$$x_i = a + ih$$

$$h = (b-a) / n = \text{cste}$$

alors les B_i^n sont indépendants de $[a,b]$

$$B_i^n = 1/(b-a) \int_a^b \prod_{j=0}^n (x-x_j)(x_i-x_j) dx$$

$$\text{or } x = a + sh \quad \text{ou } s \in [0, n]^a$$

$$dx = h ds$$

$$x = a \quad \text{si } s = 0$$

$$x = b \quad \text{si } s = n$$

donc

$$x - x_j = (a + sh) - (a + jh) = (s - j) h$$

$$x_i - x_j = (a + ih) - (a + jh) = (i - j) h$$

d'où

$$B_i^n = 1/(n.h) \int_0^n \prod_{j=0}^n ((s-j)h) / ((i-j)h) h ds$$

$$B_i^n = 1/n \int_0^n \prod_{j \neq i}^n (1-j)/(i-j) ds \quad \text{indépendants de } a \text{ et } b$$

Les formules de degrés > 8 sont rarement utilisées

- la précision n'est pas toujours améliorée
- des formules + précises et + simples existent

3) Formules composites

Règle des trapèzes

On applique la formule de Newton Cotes pour $n=1$ à des intervalles successifs

$$S^*(y) = h/2 (y_0 + y_1) + h/2 (y_1 + y_2) + \dots + h/2 (y_{n-1} + y_n)$$

$$S^*(y) = h[(y_0 + y_n)/2 + \sum_{i=1}^{n-1} y_i]$$

Règle de Simpson

Idem $n=2$

$$S^*(y) = h/3 (y_0 + 4y_1 + y_2) + h/3 (y_2 + 4y_3 + y_4) + \dots + h/3 (y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

Le nombre d'intégrale doit être pair

III Intégration Gaussienne

VI Equation différentielles

1° Introduction

La résolution numérique des équations différentielles est très importante car les problèmes n'ont pas de solution analytique. De nombreux problèmes de mécanique régie par de telles équations représentent souvent des phénomènes d'évolution temporelle.

Par exemple: $F_{\text{ext}} = M \gamma$ que l'on peut à un système équivalent du 1^{er} ordre

$$F_{\text{ext}} = M \frac{d\gamma}{dt}$$

Cette équation différentielle est un problème classique connu sous le nom de Problème de CAUCHY

Problème de CAUCHY

Trouver $X(t)$ telle que ; $\frac{dX(t)}{dt} = F(t, X(t)) \quad \forall t \in [t_1, T]$

Condition initiale ou condition de CAUCHY

$$X(t_0) = \alpha_0 \in \mathbb{R}^4 \text{ donné}$$

2° Système différentiel linéaires

A/ Définition

$$F(t, X) = A(t) X + B(t)$$

$A(t)$ est une matrice (n, n)

$B(t)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ (2nd membre)

$$\frac{dX}{dt} - A(t) X = B(t)$$

Remarque :

$$\text{Si } B(t) = 0$$

Alors $\Rightarrow$ Système homogène

B/ Systèmes différentiel linéaires à coefficients constants

a) Définition

$$\frac{dX}{dt} = Ax + B(t)$$

b) Exponentielle de matrice

1° Théorème et définitions

$\forall$ A matrice (n x n) , la $\sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k / k!$ est normalement convergente

2° Par définition :

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} A^k / k !$$

3° Propriétés

- $e^0 = \text{Id}$
- $e^A = \text{Id} + A + A^2/2 ! + A^3/3 ! + \dots$
- $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$
- $A e^A = e^A A$
- $\forall A, A$ est inversible et
 $(e^A)^{-1} = e^{-A}$
 $e^A e^{-A} = e^{A-A} = e^0 = \text{Id}$
- $t \Rightarrow X(t) = e^{tA}$

X est dérivable pour tout t et $dX/dt = A e^{tA}$

4° Théorème fondamentale

La solution du problème de CAUCHY (sans 2nd membre)

$$\begin{aligned} dX/dt &= Ax \text{ et} \\ X(t_0) &= \alpha_0 \quad X(t) = e^{(t-t_0)A} \cdot \alpha_0 \\ d/dt e^{(t-t_0)A} \cdot \alpha_0 &= A [e^{(t-t_0)A} \alpha_0] \\ X(t_0) &= e^{(t_0-t_0)A} \alpha_0 = e^0 \alpha_0 = \alpha_0 \end{aligned}$$

5° Détermination pratique des solutions

- Calcul des valeurs propres de A
- Calcul de la solution

$$X(t) = \sum_{i=0}^{\alpha} C_i e^{\lambda_i (t-t_0)} \cdot V_i$$

où

λ_i = Valeurs propres

V_i = vecteur propre

C_i = Constante d'intégration

Démo

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i(t-t_0)} V_i \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i C_i e^{\lambda_i(t-t_0)} V_i \\ = A X(t)$$

Or

$$(A - \lambda I) V_i = 0 \\ A V_i = \lambda_i V_i \\ = A \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i(t-t_0)} V_i \\ = A X(t)$$

c) Avec le 2nd membre

⇒ « Variation de la constante »

$$X = e^{(t-t_0)A} \alpha_0(t)$$

$$\frac{dX}{dt} = A e^{(t-t_0)A} \alpha + e^{(t-t_0)A} \frac{d\alpha}{dt} \\ = AX + B(t)$$

D'où

$$B(t) = e^{(t-t_0)A} \frac{d\alpha}{dt}$$

Donc

$$\alpha = \int_{t_0}^t e^{(t_0-s)A} B(s) ds + \alpha_{s_0}$$

D'où

$$X = e^{((t-t_0)A)} \left\{ \int_{t_0}^t e^{(t_0-s)A} B(s) ds + \alpha_{s_0} \right\}$$

Solution générale sans second membre

$$X = \alpha_0 e^{(t-t_0)A} + \int_{t_0}^t e^{((t-s)A)} B(s) ds$$

3° résolution numérique des équations différentielles d'ordre 1

A/ Introduction

On veut résoudre un problème de CAUCHY par voie numérique. Ces méthodes permettent de passer d'un état connu n à l'état suivant $n+1$ grâce à des discrétisations temporelles et/ou spatiales

Hypothèse : Existence, unicité, continue

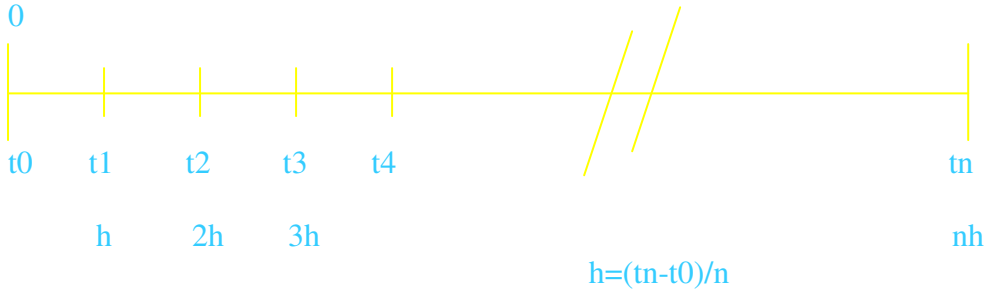
$$\frac{dx}{dt} = f(x, t)$$

$$x(t_0) = \alpha_0$$

a) Description du schema

$$Dx(t)/dt = f(t, x(t))$$

Car vérifie l'équation uniquement aux points t_i



$$dx(t_i)/dt = f(t_i, x(t_i))$$

On approxime

$$dx(t_i)/dt = (x(t_{i+1}) - x(t_i)) / h + \text{reste}$$

d'où

$$\begin{aligned} x(t_{i+1}) &= x(t_i) + h (dx(t_i))/dt \\ x(t_{i+1}) &= x(t_i) + h f(t_i, x(t_i)) \end{aligned}$$

Algorithme

$$\begin{aligned} x(t_0) &= \alpha_0 \\ x(t_1) &= x(t_0) + h f(t_0, x(t_0)) \\ &\vdots \\ x(t_n) &= x(t_{n-1}) + h f(t_{n-1}, x(t_{n-1})) \end{aligned}$$

L'approximation de la méthode d'Euler

Consiste donc à partir de $x(t_0) = \alpha_0$

De confondre la courbe et sa tangente sur un intervalle (t_i, t_{i+h})

b) Méthode de Runge Kutta

A partir d'une valeur approchée x_i à t_i , ou calcul x_{i+1} à t_{i+1}

$$\begin{aligned} x_0 &= \alpha_0 \\ x_{i+1} &= x_i + h \Phi(t_i, x_i, k) \end{aligned}$$

$$\text{Euler } \Pi(t_i, x_i, k) = f(t_i, x)$$

1° Runge – kutta d'ordre 2

$$(x_{i+1} - x_i) / h = f(x_{i+1/2}, t_{i+1/2})$$

Mais

$$x_{i+1/2} = x(t_{i+1/2})$$

D'où estimation de $x_{i+1/2}$

$$X_{i+1/2} = x_i + h/2 f(x_i, t_i)$$

Algorithm

$$T_{i+1/2} = t_i + h/2$$

$$\begin{aligned} X_{i+1/2} &= x_i + h/2 f(x_i, t_i) \\ X_{i+1} &= x_i + h f(x_{i+1/2}, t_{i+1/2}) \end{aligned}$$

Formule d'ordre 2

(Pour calculer x_{i+1} on calcule 2 fois f)

Remarque

- facile à programmer car explicite
- La connaissance de x_0 suffit pour démarrer le calcul
- Ordre 2 (précision accrue)

2° Runge Kutta d'ordre 4

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, t_i) \\ k_2 &= f(x_{i+1/2}, t_{i+1/2}) \\ k_3 &= f(x_{i+1/2}, t_{i+1/2}) \\ k_4 &= f(x_{i+1}, t_{i+1}) \end{aligned}$$

$$x_{i+1} = x_i + h/6 (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

où

$$\begin{aligned} x_{i+1/2} &= x_i + h/2 f(x_i, t_i) \\ x_{i+1/2} &= x_i + h/2 f(x_{i+1/2}, t_{i+1/2}) \\ x_{i+1} &= x_i + hf(x_{i+1/2}, t_{i+1/2}) \end{aligned}$$

Soit 4 évaluation de f , c'est la méthode la plus utilisée

c) Méthode d'Adams (à pas multiples)

X_{i+1} est déterminé à partir de x_i, t_i et x_{i-1}, t_{i-1}

1°) Formule d'Adams ouverts

$$dx/dt = f(x, t)$$

$$x^{(0)} = \alpha_0$$

Développement de Taylor

$$x(t+h) = x(t) + h x'(t) + \frac{h^2}{2} x''(t) + \dots$$

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(x,t) \\ x''(t) &= f''(x,t) \end{aligned}$$

$$x(t+h) \neq x(t) + hf + \frac{h^2}{2} f' + \frac{h^3}{3!} f'' + \dots$$

α) formule d'ordre 1

$$X_{i+1} = x_i + hf \quad (\text{EULER})$$

β) formule d'ordre 2

On prend les trois premiers termes

$$x_{i+1} = x_i + hf_i + \frac{h^2}{2} f'_i + \dots$$

$$\text{or } f(t-h) = f(t) - h f'(t) + \dots$$

$$f'(t) = (f(t) - f(t-h))/h$$

$$\text{d'où } x_{i+1} = x_i + hf_i + \frac{h^2}{2} (f_i - f_{i-1})$$

$$\text{d'où } x_{i+1} = x_i + \frac{h^2}{2} (3f_i - f_{i-1}) \quad \text{ADAMS ORDRE 2}$$

γ) Formule d'ordre 3

$$x_{i+1} = x_i + h f_i + \frac{h^2}{2} f'_i + \frac{h^3}{3!} f''_i + \theta(h^4)$$

On remplace alors f'_i et f''_i par des différences à gauche

$$f(t-h) = f(t) - hf'(t) + \frac{h^2}{2} f''(t) + \theta(h^3)$$

$$f'(t) = (f(t) - f(t-h))/h + \frac{h}{2} f''(t) + \theta(h^3)$$

$$\text{où } f''(t) = ?$$

$$f'_i(t) = (f_i - f_{i-1}) / h + \frac{h}{2} f''_i$$

$$f(t-2h) = f(t) - 2hf'(t) + \frac{(2h)^2}{2} f''(t) + \theta(h^3)$$

$$f(t-2h) - 2f(t-h) = -f(t) + h^2 f''(t) + \theta(h^3)$$

$$f''(t) = (f(t) + f(t-2h) - 2f(t-h)) / h^2$$

$$f''_i = (f_{i-2} - f_{i-1} + f_i) / h^2 + \theta(h)$$

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h^3}{12} [24f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2}] + \theta(h^3)$$

2°) Méthode d'Adams fermée (Implicite)

On écrit un développement de Taylor en faisant apparaître f_{i+1} permettant alors d'obtenir un schéma IMPLICITE.

$$\begin{aligned}
x(t-h) &= x(t) - hx'(t) + \frac{h^2}{2} x''(t) - \frac{h^3}{3!} x'''(t) + \dots \\
x_i &= x_{i+1} - hx'_{i+1} + \frac{h^2}{2} x''_{i+1} - \frac{h^3}{3!} x'''_{i+1} + \dots \\
x_{i+1} &= x_i + hx'_{i+1} - \frac{h^2}{2} x''_{i+1} + \frac{h^3}{3!} x'''_{i+1} - \dots
\end{aligned}$$

ordre 2

Expression implicite

$$X_{i+1} = x_i + \frac{h}{2} (f_i + f_{i+1}) + \theta(h^3)$$

3°) Méthode de type prédiction correcteur

Les méthodes précédentes n'apportent aucune correction à l'évolution de x_{i+1}

X_{i+1} n'apparaît que dans une seule relation même si celle-ci est relativement complexe

L'idée est alors de prédire x_{i+1} puis ensuite de la corriger (2 étapes)

a) Méthode d'Euler modifiée

Prédiction

$$x_{i+1} = x_i + hf(x_i, t_i)$$

Correction

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{2} (f(x_i, t_i) + f(x_{i+1}, t_{i+1}))$$

b) Adams prédiction correcteur

Prédiction

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{24} (55 f_i - 59 f_{i-1} + 37 f_{i-2} - 9 f_{i-3})$$

Correction

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{24} (9 f_{i+1} + 19 f_i - 5 f_{i-1} + f_{i-2})$$

Equation aux dérivées
partielles (EDP)
Différences finies

I Introduction

En physique , en mécanique , de nombreux phénomènes sont décrits par l'évolution spatiale et temporelle de grandeurs caractéristiques obéissant à des lois générales écrites sous la forme d'EDP

Les solutions analytiques étant exceptionnelles, des solutions approchées sont obtenues par des méthodes numériques
Diff, vol , elt fini

Méthode spectrales

On transforme alors un problème continu, d'un domaine continu D en un problème approché sur un domaine de calcul M .

Ce domaine M définit des points représentatifs où la solution sera effectivement calculée.

Ces points définissent un maillage pour lequel la réécriture du problème s'appelle discrétisation.

En général :

Le problème est totalement défini si on connaît :

- La loi d'évolution (eq. ou syst comp)
- Le comportement aux bornes du domaine (conditions ambiantes)
- les conditions initiales

Ainsi , la méthode des différences finies consiste à remplacer l'expression de l'EDP dans D par une approximation formellement équivalente sur M

II Classification de EDP

En pratique , les Equations aux Dérivées Partielles que l'on rencontre sont d'ordre peu élevée (2 en général). Une classification à été établie, inspirée de la classification des coniques. On rencontre 3 classes d'EDP

Hyperbolique

Coniques:

$$\varphi(x,y) = ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

Equation équivalente :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$$

Ainsi l'équation des directions asymptotiques $N = y / x = \text{constante}$ est

$$Cm^2 + 2lm + a = 0$$

hyperbolique $\Rightarrow b^2-4ac > 0$

2 directions asymptotiques réelles et $\neq$

La conique est une hyperbole

$$\partial^2 p / \partial x^2 = 1/2 \partial^2 p / \partial t^2$$

où c célérité de l'onde, vibration corde vibrante

Parabolique

$$\partial f / \partial t = \alpha \Delta f \text{ eq}^\circ \text{ diffusion}$$

Courbe / $\Delta=0$

Les deux directions asymptotiques réelles sont confondues

Conique est une parabole Elliptique

Equation d'élasticité (Laplace, poisson)

$$\partial^2 U / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 \neq \rho (x,y)$$

Conique/ $\Delta < 0$

Les deux directions asymptotiques sont complexes, la conique n'a pas de branche infinie, la conique est une ellipse

III Classification des conditions aux limites

La résolution d'une EDP nécessite toujours la connaissance des conditions aux limites pour définir totalement le problème C contour de D ,Plusieurs types de conditions existent

III.1 Condition de 1ere espèce ou de DIRICHLET

$$\forall M (x,y) \in C$$

$$F(M) = U(x,y,t)$$

Etat homogène

La fonction f est donnée sur le contour

III.2 Condition de 2° espèce où NEUMANN

$$\forall M (x,y) \in C$$

$$\partial f / \partial n = u (x,y,t)$$

N = normale sortant de M

La dérivée de F est donnée le long de la normale ce qui revient à donner un flux

III . 3 Condition de 3° espèce ou mixte

$$\forall M (x,y) \in C$$

$$(k \partial f / \partial n) \cdot n + hf = \mu(x,y,t)$$

IV . Maillage

Cette étape consiste à construire le domaine M, donc à définir les points calcul ou sera résolu l' équation totale aux dérivées partielles

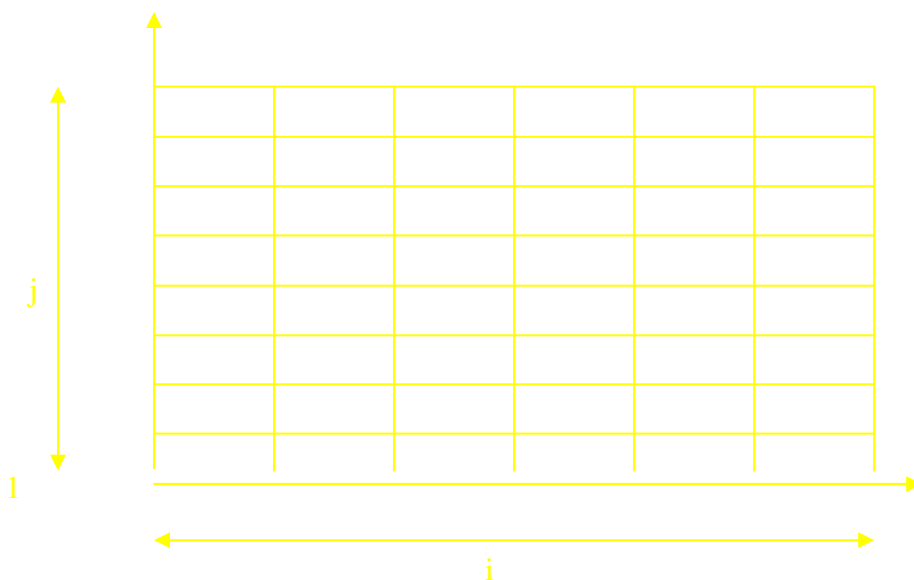
Placer nous dans les cas ou D est un rectangle [0,a] α [0,b]

On suppose vouloir connaître la solution en n_x point selon l'axe x et n_y selon y

L'intervalle entre 2 points est donc

$$\Delta x = a/n_x - 1$$

$$\Delta y = b/n_y - 1$$



Un point M sera donc référé par deux indices i et j . La numérotation la plus simple est la meilleure (maillage structure le point i+1, j est donc à droite du point (i,j)

$$(x_i, y_j) = ((i-1) \Delta x, (j-1) \Delta y)$$

Si f est la fonction recherchée alors $f(x,y) = f(x_i, y_j)$ que l'on note aussi $f_{i,j}$.

V . Formule des différences finies

V.1 Approximation d'une dérivée 1^{ère}

$$(\partial f / \partial x)_{i,j} = (f_{i+1,j} - f_{i,j}) / \Delta x$$

Ou

$$(\partial f / \partial x)_{i,j} = (f_{i,j} - f_{i-1,j}) / \Delta x$$

Ou

$$(\partial f / \partial x)_{i,j} = (f_{i-1,j} - f_{i+1,j}) / 2\Delta x$$

V.2 Dérivées secondes

$$(\partial^2 f / \partial x^2)_{i,j} = 1/\Delta x^2 (f_{i-1,j} - 2f_{i,j} + f_{i+1,j})$$

$$(\partial^2 f / \partial y^2)_{i,j} = 1/\Delta y^2 (f_{i,j-1} - 2f_{i,j} + f_{i,j+1})$$

V.3 Dérivées croisées

$$\begin{aligned} \partial^2 f / \partial x \partial y &= \partial / \partial y (\partial f / \partial x)_{i,j} \\ &= 1/(4\Delta x \Delta y) (f_{(i+1,j+1)} - f_{(i+1,j-1)} - f_{(i-1,j+1)} + f_{(i-1,j-1)}) \end{aligned}$$